

氏名	櫻井 みぎ和
学位の種類	博士 (理学)
学位記番号	甲第理6号
学位授与年月日	2014 (平成 26) 年 3 月 14 日
学位授与の要件	東京女子大学学位規程第 3 条第 3 項第 1 号
学位論文題目	Distances by local moves and invariants of virtual knots (局所変形による距離と仮想結び目の不変量)
論文審査委員	主査 教授 大山 淑之 副査 准教授 新國 亮 副査 教授 吉荒 聡 副査 早稲田大学教育・総合科学学術院教授 谷山 公規

## 内容の要旨および審査の結果の要旨

### I. 論文内容の要旨

結び目とは円周の 3 次元空間  $\mathbf{R}^3$  への埋め込み、あるいはその像である。直観的には、紐で結び目を作り、その両端をつなげたものを位相幾何学では結び目と呼ぶ。その結び目の平面への射影を考える。射影のおける交点に上下の情報を与えたものを結び目の正則表示という。空間内の図形である結び目を平面上の図形と考え、空間内で移りあう結び目は、その正則表示上では、ライデマイスター移動と呼ばれる変形で移りあうことが知られている。

1999 年発表の論文において、カウフマンは仮想結び目の理論を提唱した。一般の交点だけでなく、仮想交点の存在もゆるす結び目の正則表示を仮想結び目正則表示とよぶ。仮想結び目正則表示の一般ライデマイスター移動における同値類を仮想結び目という。

結び目はガウス図式というグラフで表すことができるが、ガウス図式に対応する結び目が存在するとは限らない。しかし、任意のガウス図式は仮想結び目の正則表示で表わ

すことが可能である。また、仮想結び目は曲面上の結び目を表すという解釈もでき、仮想結び目理論は結び目理論の拡張と考えられている。仮想結び目の世界は一般の結び目とは全く異なる様相を呈することもあり、現在精力的に研究されている。

結び目の正則表示において、結び目の一部分を変形させることが考えられており、局所変形と呼ばれている。2つの結び目がある局所変形で移りあう場合、移すのに必要なその局所変形の最小回数は距離の公理を満たす。任意の結び目正則表示を移しあう局所変形は、特に結び目解消操作と呼ばれ、自明な結び目までの距離は結び目解消数と呼ばれる。局所変形で移りあう結び目の集合に距離空間の構造をいれることができ、その距離を決定することは結び目理論にとって重要な問題となる。仮想結び目においても、局所変形による距離を決定することは、局所変形による距離空間の構造を明らかにし、様々な性質の解明に役立つ。同じ仮想結び目に対して、同じ数学的量を対応される写像を仮想結び目不変量という。局所変形による距離を決定するためには、仮想結び目不変量により、その距離を評価する必要がある。

仮想結び目には、禁止移動 (forbidden move)、 $n$  変形 ( $n$ -variation) と呼ばれる局所変形がある。本論文は、禁止移動 (forbidden move) や  $n$  変形 ( $n$ -variation) と多項式不変量や有限型不変量との関係を明らかにし、それらの局所変形による距離の評価、決定をおこなったものである。

任意の仮想結び目正則表示は、禁止移動 (forbidden move) により移りあう。任意の結び目は、交差交換により移りあうが、仮想結び目では、交差交換は結び目解消操作ではない。禁止移動 (forbidden move) は、仮想結び目にとって基本的な局所変形である。一方、ヘンリッチは、仮想結び目の不変量として、スムージング不変量とグルーイング不変量を定義した。仮想結び目正則表示の同値類が生成する整数加群に値を取る写像である。正則表示の同値類から数学的量への写像を合成することにより、具体的に計算可能な不変量を導くことができる。このようにして、多項式不変量  $Pt$  はスムージング不変量から得られることになる。

本論文では、1回の禁止移動 (forbidden move) によるスムージング不変量とグルーイング不変量の変化量を決定した。その結果、禁止移動 (forbidden move) による2つの仮想結び目間の距離を多項式不変量  $Pt$  で評価することが可能となり、多くの仮想結び目の結び目解消数を決定することができた。

結び目理論には、有限型不変量という概念がある。バシリエフにより定義されたもの

であり、2つの結び目の次数  $n$  未満の有限型不変量が一致する必要十分条件が、その2つの結び目が  $C_n$  移動と呼ばれる局所変形で移りあうという定理が証明されている。代数的条件と幾何的条件が同値であるという優れた結果であり、この定理により様々な成果が得られ、問題が提起される。仮想結び目に対して、2つの方法で、有限型不変量が定義されている。一般の結び目と同様の定義をすることができる。しかし、仮想結び目においては、交差交換が結び目解消操作ではないという事情から、一般の結び目のような結果を期待することは難しいと考えられる。一方、グサロフ、ポリャック、ヴィロの3名は、半仮想交点を用いて有限型不変量を定義し、また、局所変形  $n$  変形 ( $n$ -variation) を導入した。実際の交点を仮想交点に変えるという操作をもとに有限型不変量を定義したものであり、その理論は興味深く、また難しいものである。グサロフ、ポリャック、ヴィロは、数直線  $R$  の埋め込みの正則表示から定義される長仮想結び目に対して、次数2の整数値有限型不変量を生成する不変量  $v_{2,1}$ 、 $v_{2,2}$  を決定し、仮想結び目に対する次数3の整数値有限型不変量を生成する  $v_3$  を決定している。また、一般の結び目の  $C_n$  移動に対応する局所変形である  $n$  変形 ( $n$ -variation) を提唱した。禁止移動 (forbidden move) と2変形 (2-variation) は本質的に同じ局所変形となっている。

本論文の2つめの結果は、長仮想結び目に対して、1回の2変形 (2-variation) による  $v_{2,1}$ 、 $v_{2,2}$  の変化量、仮想結び目に対して、1回の3変形 (3-variation) による  $v_3$  の変化量を決定したことである。この結果により、長仮想結び目の2変形 (2-variation) による距離、仮想結び目の3変形 (3-variation) による距離の評価が可能となった。

前述のように、第1の結果における禁止移動 (forbidden move) は第2の結果の2変形 (2-variation) と本質的に同じ局所変形である。第1の結果は、2変形による仮想結び目の距離を多項式不変量  $Pt$  で評価したことになる。 $n$  変形 ( $n$ -variation) による多項式不変量  $Pt$  の変化量も本論文で決定されている。

## II. 審査の結果の要旨

### 1. 論文の構成

本論文は、3つの章からなる。第1章で、基本的な定義が詳しく説明される。仮想結び目、長仮想結び目、そして局所変形、特に本論文の研究対象である禁止移動 (forbidden move) とそのガウス図式上の動きについて、様々な図を用いて説明されている。

第2章では、本論文の最初の結果について、述べられている。ヘンリッチによるスム

ージング不変量とグルーイング不変量が解説され、多項式不変量の定義が説明される。そして、禁止移動 (forbidden move) による各不変量の変化量が計算される。多項式不変量に対する変化量の結果により、禁止移動 (forbidden move) による距離が評価され、具体的に禁止移動による結び目解消数が決定される例が示される。

第 3 章では、グサロフ、ポリャック、ヴィロによる  $n$  変形 ( $n$ -variation) と有限型不変量が説明される。長仮想結び目に対する 1 回の 2 変形 (2-variation) による  $v_{2,1}$ 、 $v_{2,2}$  の変化量、仮想結び目に対する 1 回の 3 変形 (3-variation) による  $v_3$  の変化量が、ガウス図式の詳細な考察により、決定される。この結果から得られる興味深い仮想結び目の例があげられている。最後の節では、 $n$  変形 ( $n$ -variation) による多項式不変量  $Pt$  の変化量が決定され、3 変形による距離の評価式、 $n$  が 4 以上のとき、 $n$  変形 ( $n$ -variation) が結び目解消操作ではないことが導かれている。

## 2. 論文の特徴

本論文は仮想結び目を研究対象とし、その内容は、すでに査読付き専門雑誌に掲載された 2 本の論文の結果に最新の結果を加えたものである。結び目理論は、空間内の図形を扱うものであるが、その正則表示から定義される仮想結び目は、平面上の図形の同値類が研究対象である。仮想結び目は平面上のグラフであるガウス図式の同値類と同一視される。そのため、結び目理論とは、異なった世界をみることができる。研究している局所変形は、その正則表示に仮想交点を含み、仮想結び目独自の世界を表現するものである。

また、研究対象としている不変量は平面上のグラフの整数加群により定義されており、仮想結び目の特徴がよく表れているものである。特に、有限型不変量は抽象的かつ難解な部分もある。

本論文は、仮想結び目の特徴をよく表す研究対象に対し、複雑な不変量を詳細に検討し、厳密に計算したものである。その結果、結び目理論で研究されてきた局所変形による距離の決定という問題を、仮想結び目の世界へ拡張し、新たな視点と問題を提起している。

## 3. 論文の評価

結び目正則表示において、ある局所変形で結び目に移りあうとき、その最小回数は距

離関数となる。その距離は結び目理論の様々な問題へ応用され、局所変形による距離の決定は結び目理論にとって重要な問題である。1999年に仮想結び目理論が提唱され、仮想結び目は結び目を拡張した概念と解釈できる。仮想結び目において、禁止移動 (forbidden move) と呼ばれる局所変形は基本的な結び目解消操作である。この禁止移動による距離を決定するという問題設定は自然であり、かつ、今後の仮想結び目理論の研究にとって重要であることは明らかである。本論文の第1の結果は、ヘンリッチによる不変量を用いて禁止移動 (forbidden move) による距離を評価し、様々な仮想結び目の結び目解消数を決定したことである。ヘンリッチの不変量に着目した視点はすばらしく、評価に値する。

結び目理論では、特異点を用いて有限型不変量が定義されている。結び目の次数  $n$  未満の有限型不変量が一致する必要十分条件が  $C_n$  移動と呼ばれる局所変形の言葉で表されている。仮想結び目においても、2つの方法で有限型不変量が定義されている。現段階では、どちらの定義においても一般の結び目のようなシンプルな結果は示されていない。しかし、グサロフ、ポリャック、ヴィロによる有限型不変量の概念は難解ではあるが、仮想結び目の特徴を反映したもので、その研究の発展が期待される。本論文では、このグサロフ、ポリャック、ヴィロによる有限型不変量をもちいて、彼らが有限型不変量にとって重要と考えている  $n$  変形 (n-variation) による距離の評価をおこなった。グサロフ、ポリャック、ヴィロの理論を修得し、コード図式というグラフの整数加群で表わされる計算を厳密に行っている。その複雑な計算からは、きわめて簡潔な定理が得られている。 $n$  変形 (n-variation) の距離に対して、 $Pt$  を用いて評価した点も大変興味深い。良い結果である。

#### 4. 最終試験の概要

最終試験として、公開の論文発表会をおこなった。基本的事項を説明し、得られた定理に対して、その証明方法を詳細に解説した。発表内容は論理的に整理され、十分な準備をされたものであった。発表は、多くの図を用い、聴衆の反応を確かめつつ行われ、良い発表といえる。

外国語の試験においても、論文の内容が適切にまとめられ、丁寧に解説された。

以上のように、論文の内容、最終試験の結果ともに、本学博士 (理学) に十分に値す

ると判断できる。