“無限遠”をめぐって

——常識に挑戦する——

（1988年度始業講演——文理学部）

根　岸　愛　子

0. 前　置　き

このような講演の場合，普通は自分自身の仕事について，または最新の研究結果について話すことが期待されるでしょう。しかし，数学に関しては，学問の性質上一時間余りという短い時間に話をして理解していただくことはとうていできません。ここでは，数学史の流れの中で，数学，いや数学を含めてあらゆる学問の中で問題になってくる“無限”（あるいはその反対の“有限”）ということをめぐって，そのほんの一部のことについて考えてみたいと思います。

1. 無限ということ

私達は無限ということを平素，なにげなく莫然と使っています。昔から，宇宙は無限か有限かということが，問題となって今に続いています。これは世界観，自然観の問題であって，様々の見方があり，これという解決には至っていません。物理学においても，多くの理論がたてられています。さらに無限は，時間の無限，すなわち永遠として，宗教，芸術，生活文化とも関連があります。神の無限性に対して人間の有限性を想い，美（芸術）の無限性に対して作品の有限性を考え，人類の将来に対して資源の有限性を問題にしたりします。数学では，“数の無限”，“空間の無限”がでてきます。これらの概念も，いくら数えても終わらない，行っても，行っても果てがない，と

いう意味で“時間の無限”につながります。また，無限大はいくらでも大きくなることであり，無限小はいくらでも分割できることです。数学者ワイル(C. H. H. Weyl 1885–1955) は，「数学とは，無限の学問である。」といっていますが，数学にとって無限は極めて重要な概念であり，無限の宇宙という考え方は，すぐれて近代的なものです。ギリシャ時代には無限を，きりがない，限界がない，限定されない，という意味に使い，一般に無限を考えることを恐れていました。近代において無限が学問のなかで積極的な意味をもってきたのは，全く新しい事実であり，単なる過程を超えた一つのまとまった全体として対象化されることになりました。数学におけるカントール (G. Cantor 1845–1918) の集合論はこのことから出発しています。

ここでは，幾何学における空間の無限を問題にすることにします。空間の無限といってもいろいろあり，英語でいうと unbounded とか endless などがありここには少し意味のずれがあります。たとえば，直線を考えると unbounded であり，かつ endless ですが，円周を考えると，ぐるぐるまわっても端がないので endless ではありますが，無限にひろがってはいないので bounded です。西洋では，歴史の流れを過去から未来へと直線的に考える方が強いですが，東洋では，輪廻の思想などあって，円周的な考え方もします。キリスト教と仏教の違いともいえて一寸おもしろいことです。

紀元前ピタゴラス学派（B. C. 580 頃）は，点は大きさを持つと考え，「一つの線分は有限個の点で構成されている。」，何個か分からないが理論的に数えることができるのだと考えていました。しかし，そのうちに矛盾がでてきて「一つの線分を形成している点の個数は有限でない。」と考えざるをえなくなりました。彼らは，このことを一般の人々に口外してはならないとして，もし，漏らした時は，罰せられるとして，罰則までありました。ここで，ギリシャ人は始めて有限でないものに直面して当惑し，これと対決することを避けました。そこで，線分の長さを数値で表さないで，図形のみを用いたギリシャの幾何学が作られていきました。これが B. C. 300 頃にユークリッド (Euclid) の幾何学として系統だてられていくのです。

2．ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学

中学で幾何を習う時,「どこまで行っても交わらない二直線は平行である。」という形で平行線を教わります。この平行線の公理は誰でも当然と認めて疑わない常識として頭に染み着いています。ユークリッドの有名な「原論」には23個の定義，5個の公理と共に，5個の公準（要請）が書かれています。公準とは，幾何学的に当然と思われて議論の出発点となることをいいます。この公準の第五番目がいわゆる平行線の公理で,「二直線が一直線と交わっているとき，もしその一直線の同じ側の内角の和が，二直角より小ならば，二直線はその側で必ず交わるように延長できる。」というものです。“どこまで行っても”という無限を表す言葉は使っていません。どこか有限一定なところで，二直線が交わるといっているのであって，これを否定すると，内角の和が二直角のとき，二直線は無限に延長しても交わらない，すなわち平行であるというのです。他の四つの公準は,

1．二点が与えられれば，その二点を通る直線が引ける。
2．任意の線分は両方へ延長できる。
3．任意の点を中心として，任意の半径の円が描ける。
4．すべて直角は等しい。

とあって単純明解ですが，第五公準は，回りくどく，ユークリッドも問題を感じていたらしく最後にそっと入れたような感じです。事実，後世の多くの人々がこのことに関して議論したと思われますが，中世においては，科学の暗黒時代といわれて，コペルニクスの事件を思いだしても分かるように，書き残すことなく葬られた可能性があります。17世紀前半頃から，絵画の透視法からでてきた射影幾何がこの平行線の問題に新しい考えを導入し，19世紀に至って，ユークリッドの第五公準を何等かの形で否定する非ユークリッド幾何学が生まれることになります。

3．双対性の追求

デザルグ (G. Desargues 1593–1662) は，独学の建築家・技術家でしたが,

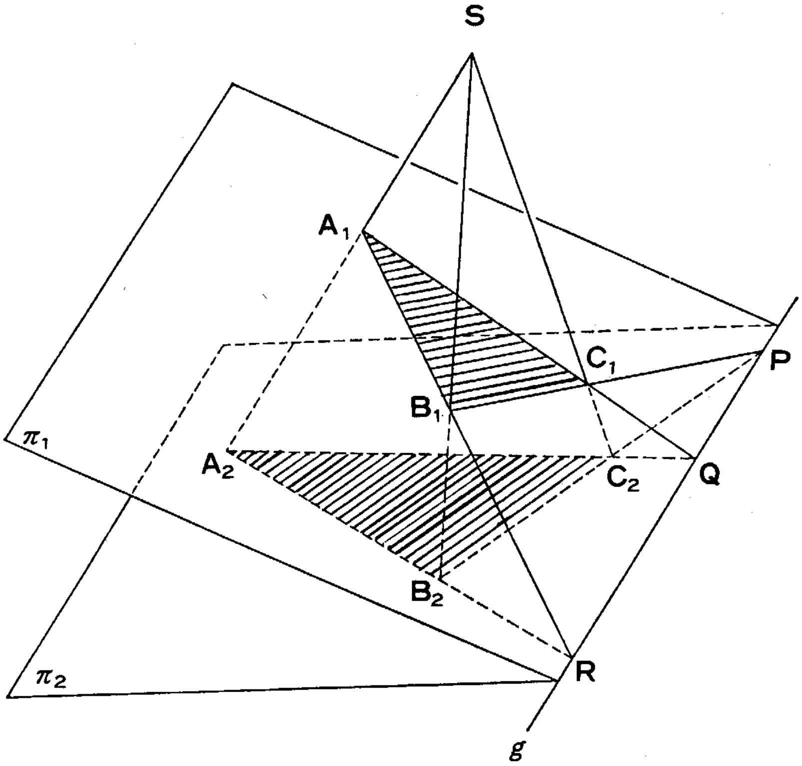

図 1

射影幾何について，最初に深い洞察をもって，つぎのような一つの美しい定理を証明しました。

〔デザルグの定理〕

二つの三角形において，もしその対応する頂点を結ぶ三つの直線が一点に会するならば，その対応する辺（の延長）の交点は一直線上にある。

(図 1 参照)

同時代のパスカル (B. Pascal 1623–1662) は，有名なフランスの哲学者であり，数学者ですが，16 才のときにこの定理と関係の深い重要な定理を発見しました。

〔パスカルの定理〕

楕円に内接する六角形の相対する辺の（延長の）交点は一直線上にある。

(図 2 参照)

定理は証明しなければ数学にならないのですが，ここでは，その時間がないので認めていただくことにします。デザルグの定理は二つの三角形が平面上

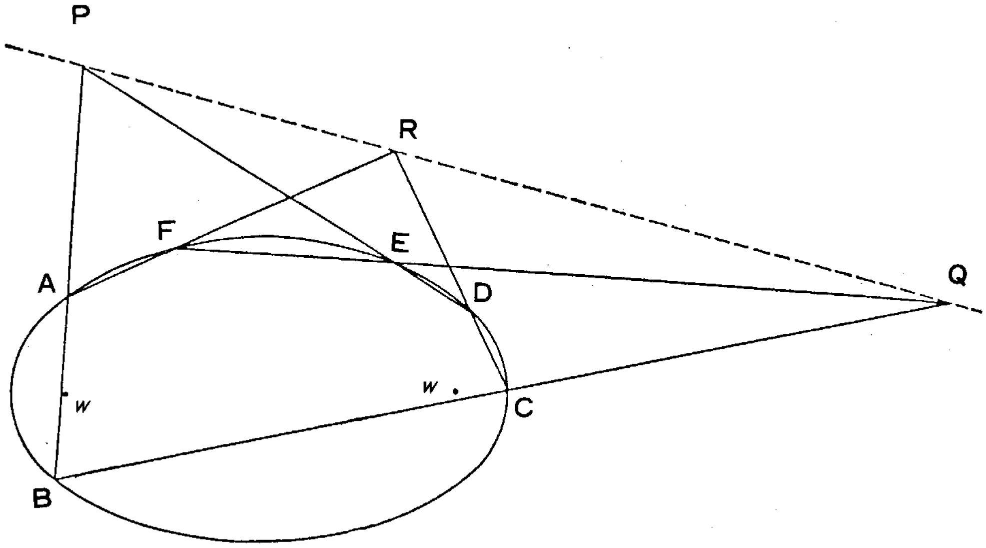

図2

にあると考えてもよいのですが，空間に浮かんでいるとしても成立ちます。この場合，少し見方を変えると，一点から三本の直線が出ていて，任意の平面でこれを切るとその切口の三点を頂点とする三角形ができます。そのような三角形を二つ考えると見てもよいので，このような考え方を射影と切断といいます。一つの直線上の一点を止めてその直線をぐるっと回すと，一点でつながった円錐が二つできます。すなわち，一点から無限に多くの直線が出ているわけで，これを平面で切りますと，切る場所によって，その切口が，円，楕円，放物線，双曲線などになります。これらは円錐曲線と呼ばれて，射影と切断の意味で親類関係なのです。従って，パスカルの定理において楕円とあるのは，円錐曲線と書換えてもよいのです。実際，パスカルは円の場合を証明しています。ここで，一寸困った問題がでてきます。デザルグの定理の二つの三角形が相似の場合，対応する辺は平行になります。パスカルの定理でも円に内接する正六角形を考えると，対応する辺は平行になっています。このときは，定理は例外とすべきでしょうか？ 後に解決が与えられますので，ここではもう一つの重要な概念を述べます。

19世紀に入って，ブリアンション (C. J. Brianchon 1785–1864) がつぎのような定理を発見しました。

〔ブリアンションの定理〕

六角形を楕円に外接させると，この六角形の向かい合った頂点を結ぶ直線は，一点で交わる。

これはパスカルの定理の双対です。双対とは，ある命題があって，そのなかに使われている二つの概念をすべて入れ替えて成り立つ命題のことです。ここでは，点と直線が入れ替えられています。双対性は数学の他の分野にもしばしば現れる美しい原理です。“二点を通る直線がただ一つきまる。”という命題の双対は，“二直線は一点で交わる。”ですが，二直線が平行の場合は双対性が破れてしまいます。その場合をなんとかして，双対性を保つことができれば，前に述べた二つの定理の例外の問題も解決します。

4．無限遠点と無限遠直線

デザルグは，いかなる平行線も共通点をもつとみなすという約束をすることにしました。これは新しい見方であって，ユークリッドの第五公準（常識）を否定するものですが，論理的には可能です。しかし，その交点はユークリッド幾何学で考えられている普通の有限の世界の点とは違って，無限遠点と呼ばれる想像上の点であるとします。ある方向の平行線が一つの無限遠点を共有し，別の方向の平行線は他の無限遠点を共有して，これらは無限遠直線と呼ばれる一つの直線上にあると約束します。この考えは常識を破ることになるのでにわかに受け入れられないと感じる人もあるでしょうし，これは素晴らしい考えだとすぐに受け入れる人もあるでしょう。受け入れるか受け入れないかは自由ですが，ゆっくり考えてみて，なるほどと思ってくださると，そこに新しい世界が開かれるとおもいます。電車の線路は平行ですが遠くへ行くと，先が狭まって見えます。このことからみても，この無限遠点や無限遠直線の約束はそれほど無理なものとは思えません。もう一つの証拠は，円錐曲線の中の楕円と放物線の光学的性質です。楕円には焦点が二つあり，一つの焦点からでた光は，楕円の内部が鏡になっているとすると，光の反射の法則によって反射して他の焦点に集まることがわかっています。放物

線には焦点が一つあって，そこからでた光は反射して，軸に平行に進みます。この性質を利用して車のヘッド・ライトの内側は切口が放物線になっていて，焦点に置かれたランプからでた光は平行に進んで前方を照らします。また，電波を中継するパラボラ・アンテナも切口が放物線で，非常に遠くからきた電波はほぼ平行にきたと考えられますので，焦点に集まり，電波が強められて次に送られることになります。このことを，今の約束で考えますと，放物線も焦点が二つあるが，一つは無限遠にあるとしてよいことになります。このような考え方によって点と直線の双対性が成り立つことになり，デザルグの定理，パスカルの定理またその双対であるブリアンションの定理も完全な美しい定理となります。

無限遠については，別の考え方もあります。平面上の点と，球面上の，一点を除いた点との間に一対一の対応をつけ，今取り除いた点に，平面上の無限遠点をみな集めたとしてこれを無限遠点とすることもできます。すなわち無限に広がった風呂敷の上に大きな球を置き，しわがないように縮めながら風呂敷で球を包んでしまい，北極の点を無限遠点とします。この場合は無限遠点は一つで，無限遠直線はありません。この考え方も新しい位相幾何学ではよく使って，便利な考え方ですが，ここでは詳しいことは述べません。

5．エッシャーの絵

19世紀に入って，ロバチェフスキー(N. I. Lobatchevski 1793–1856)，ボヤイ(J. Bolyai 1802–1860)，リーマン(G. F. B. Riemann 1826–1866)などによって，ユークリッドの第五公準を否定した非ユークリッド幾何学がつくりだされました。これらは，第五公準の否定の仕方によって異なる種類の幾何学になって，特に，ロバチェフスキーの幾何学は双曲幾何ともいわれ，物理学においても重要な理論の基礎になります。

ここで話をかえてエッシャーの絵について考えます。エッシャー(M. C. Escher 1898–1972)は，オランダの画家で，だまし絵や不思議な世界を描いた絵で有名で，そのいくつかは見たことがある人もいるでしょう。彼の絵は，

図3

グラフィック・アーツというジャンルにはいるかとおもわれますが，周期的な模様，同じ形で平面を埋めるモザイック（平面充塡）など美しい作品を残しています。(図3参照）彼のやり方は数学的で，特に，幾何学と関係があります。彼はまたメービウスの帯，無限階段など無限の繰り返しを表現しましたが，無限に広がる模様を有限な画面に表現したいと思い続けていました。

6．エッシャーとコセクターとの出会い

1954年，第12回国際数学者会議がオランダのアムステルダムで開かれました。この会議は四年毎に開かれ，このつぎは日本で開かれることが決っていますが，オランダの会議では日本の小平邦彦先生が，数学のノーベル賞であるフィールズ賞を授賞しました。この会議の会場にエッシャーの絵が展示されていて代数学者のコクセターの注目をひきました。コクセター(H. S. M. Coxeter 1907-　)は，イギリスに生まれ，後にカナダのトロント大学の教授になりましたが，群論が専門で特に多面体の回転や反転を扱う幾何学を群の方法で研究して多くの業績をあげました。コクセターはまた絵画，音楽，宗

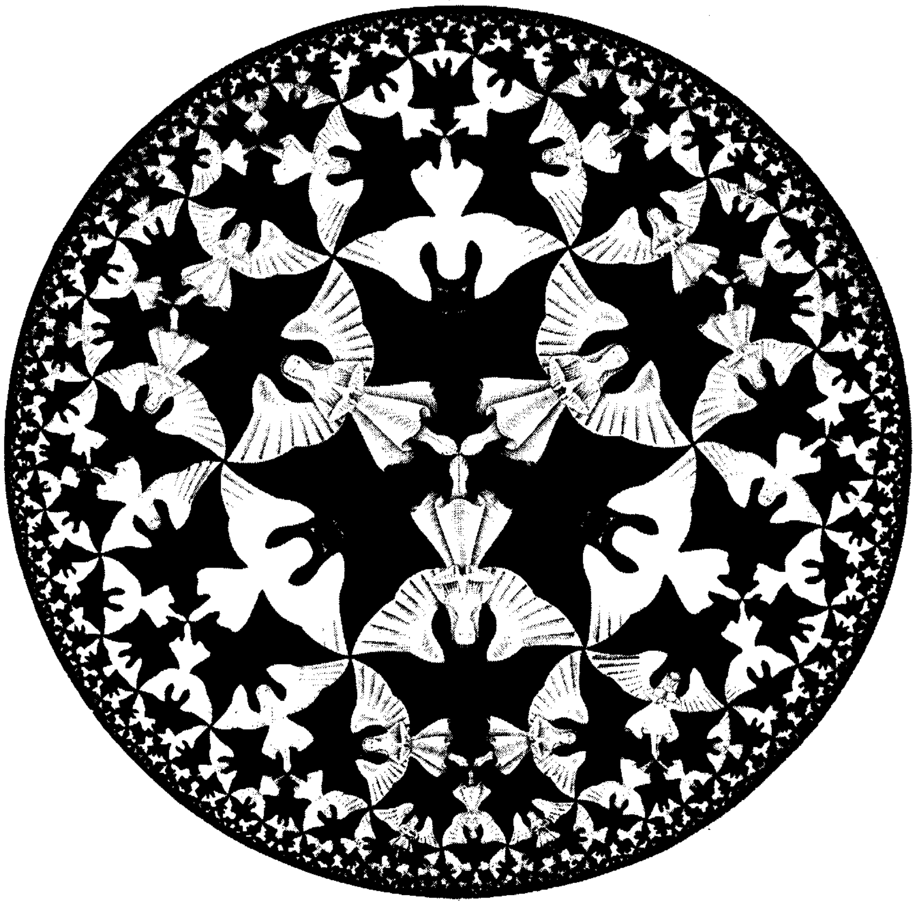

図 4

教，文学にも関心が深く，ピアニストか作曲家を志したこともあり，幅の広い人です。エッシャーはこのときコクセターに出会い大きな影響を受けました。二人は，意気投合して絵や数学について論じあいその後も文通をつづけましたが，1960 年にはエッシャーがコクセターのトロントの家を訪ねています。エッシャーは，無限の模様を有限の画面に表現することについてコクセターに教えを乞い，様々な試みをしていますが，1950 年代に，Circle Limit という作品を発表しました (図 4 参照)。この絵では円の中に天使と悪魔が組合わさっていますが，円周に近づくほど小さくなっています。われわれがこの中を歩いて円周に近づくとき，すべてのものが同じ割合で小さくなるとすると，われわれも物差しも小さくなるので円周に近づいても寸法は変わらず，いつまでたっても円周に到達することはできません。コクセターは

これをみて大変感動しました。これは実は非ユークリッド幾何学の双曲幾何の世界を表現しているのであって，更に驚くべきことは，コクセターが双曲幾何の表現の中で厳密な計算によって発見したある角を，エッシャーは直感と経験によって発見し，しかもその大きさがぴったりと一致したことです。これは非常に面白いことだとおもいます。

ピタゴラスの時代から現代まで，無限遠に関する考え方をざっとみてきました。限られた時間でもあり意を尽くすことができませんでしたが，常識を疑うことから出発して，自由な精神と柔軟な心をもって物事に対することによって，新しい学問が生み出されることを見ていただけたと思います。これからの勉学に何かのヒントと刺激を得ていただければ幸いです。